

De Cuadrados de Frecuencia a Cuadrados Latinos

Por Armando Claudio Jiménez

¿Cuántos hay?

Bosquejo

- Definiciones generales
- Aplicaciones de los Cuadrados Latinos
- Cuantos Cuadrados Latinos se conocen
- Trabajo en el verano
- Algoritmo
- Trabajo Actual

Cuadrados Latinos y Cuadrados de Frecuencia

Un cuadrado latino de orden n es un arreglo $n \times n$ de n elementos distintos, los cuales aparecen exactamente una vez en cada fila y cada columna.

1	2	3	4
2	1	4	3
3	4	1	2
4	3	2	1

Cuadrado Latino de orden 4

Un cuadrado de frecuencia $F(n; \lambda_1, \dots, \lambda_m)$ es un arreglo $n \times n$ en el cual los símbolos i con $i \leq 1 \leq m$ aparecen, exactamente, λ_i veces en cada fila y en cada columna.

1	1	1	2
1	1	2	1
1	2	1	1
2	1	1	1

$F(4; 3, 1)$

Un cuadrado de frecuencia con vector $F(4; 1, 1, 1, 1)$ es un cuadrado latino de orden 4.

Una i -*transversal* es un conjunto de n elementos, uno por cada fila y columna, cada cual conteniendo el símbolo i .

Cuadrados Latinos y Cuadrados de Frecuencia

Un cuadrado latino de orden n es un arreglo $n \times n$ de n elementos distintos, los cuales aparecen exactamente una vez en cada fila y cada columna.

1	2	3	4
2	1	4	3
3	4	1	2
4	3	2	1

Cuadrado Latino de orden 4

Un cuadrado de frecuencia $F(n; \lambda_1, \dots, \lambda_m)$ es un arreglo $n \times n$ en el cual los símbolos i con $i \leq 1 \leq m$ aparecen, exactamente, λ_i veces en cada fila y en cada columna.

1	1	1	2
1	1	2	1
1	2	1	1
2	1	1	1

$F(4; 3, 1)$

Un cuadrado de frecuencia con vector $F(4; 1, 1, 1, 1)$ es un cuadrado latino de orden 4.

Una i -*transversal* es un conjunto de n elementos, uno por cada fila y columna, cada cual conteniendo el símbolo i .

Aplicaciones y usos

Criptografía

Teoría de Códigos

Códigos Correctores de Errores

Estadísticas

Sudoku!

		1						
		2		3				4
			5			6		7
5			1	4				
	7						2	
				7	8			9
8		7			9			
4				6		3		
						5		

El famoso Sudoku es un cuadrado latino de orden 9

Numero de Cuadrados Latinos de orden n

n	L_n
1	1
2	2
3	12
4	576
5	161,280
6	812,851,200
7	(16,942,080)(5040)(720)
8	(535,281,401,856)8!7!
9	(377,597,570,964,258,816)9!8!
10	(7,580,721,483,160,132,811,489,280) 10!9!
11	(5,363,937,773,277,371,298,119,673,540,771,840)11! 10!

* Hasta el momento se desconoce cuantos hay para $n > 11$

Como contar cuadrados de frecuencia

Tomar un cuadrado de frecuencia con vector $F(9;8,1)$

Buscar todas las 1-transversales

Para cada 1-transversal, construir un cuadrado de frecuencia con vector $F(9;7,1,1)$.

Clasificar cada cuadrado de frecuencia $F(9;7,1,1)$ encontrado en clases de isotopía.

Con un cuadrado de frecuencia $F(9;7,1,1)$, las clases de isotopía y la fórmula en el lema 3.1 se obtiene el número de cuadrados $F(9;6,1,1,1,1)$ que no se sabe.

$$\binom{n}{\lambda_1, \dots, \lambda_m} \binom{n-1}{\lambda_1-1, \dots, \lambda_m} \sum_{j=1}^{\Lambda} n_j T_m(F_j(n))$$

Lema 3.1

Dos cuadrados de frecuencia, F_1 y F_2 , con el mismo orden y vector de frecuencia pertenecen a la misma **clase de isotopía** si existen permutaciones σ_r, σ_c y σ_{num} , tal que F_2 se puede obtener al aplicarle σ_r a las filas de F_1 y, luego, aplicando σ_c a las columnas y σ_{num} a los números en cada cuadrado resultante respectivamente.

Algoritmo para encontrar las i -transversales

Buscar 1-transversal

Tomar el primer elemento disponible.

$F(4; 2, 2)$

1	1	2	2
---	---	---	---

1	1	2	2
---	---	---	---

2	2	1	1
---	---	---	---

2	2	1	1
---	---	---	---

Algoritmo para encontrar las i -transversales

Buscar 1-transversal

Tomar el primer elemento disponible.

Eliminar columna donde esta el elemento seleccionado.

$F(4; 2, 2)$

1	1	2	2
1	1	2	2
2	2	1	1
2	2	1	1

Algoritmo para encontrar las i -transversales

Buscar 1-transversal

Tomar el primer elemento disponible.

Eliminar columna donde esta el
elemento seleccionado.

Ir a la siguiente fila.

$F(4; 2, 2)$

1	1	2	2
1	1	2	2
2	2	1	1
2	2	1	1

Algoritmo para encontrar las i -transversales

Buscar 1-transversal

Tomar el primer elemento disponible.

Eliminar columna donde esta el elemento seleccionado.

Ir a la siguiente fila.

(Repetir hasta llegar a la ultima fila).

$F(4; 2, 2)$

1	1	2	2
1	1	2	2
2	2	1	1
2	2	1	1

Algoritmo para encontrar las i -transversales

Buscar 1-transversal

Tomar el primer elemento disponible.

Eliminar columna donde esta el elemento seleccionado.

Ir a la siguiente fila.

(Repetir hasta llegar a la ultima fila).

$F(4; 2, 2)$

1	1	2	2
1	1	2	2
2	2	1	1
2	2	1	1

Algoritmo para encontrar las i -transversales

Buscar 1-transversal

Tomar el primer elemento disponible.
Eliminar columna donde esta el
elemento seleccionado.

Ir a la siguiente fila.

(Repetir hasta llegar a la ultima fila).

$F(4; 2, 2)$

1	1	2	2
1	1	2	2
2	2	1	1
2	2	1	1

Algoritmo para encontrar las i -transversales

Buscar 1-transversal

Tomar el primer elemento disponible.

Eliminar columna donde esta el
elemento seleccionado.

Ir a la siguiente fila.

(Repetir hasta llegar a la ultima fila).

$F(4; 2, 2)$

1	1	2	2
1	1	2	2
2	2	1	1
2	2	1	1

Algoritmo para encontrar las i -transversales

Buscar 1-transversal

Tomar el primer elemento disponible.

Eliminar columna donde esta el elemento seleccionado.

Ir a la siguiente fila.

(Repetir hasta llegar a la ultima fila).

$F(4; 2, 2)$

1	1	2	2
1	1	2	2
2	2	1	1
2	2	1	1

Algoritmo para encontrar las i -transversales

Buscar 1-transversal

Tomar el primer elemento disponible.

Eliminar columna donde esta el elemento seleccionado.

Ir a la siguiente fila.

(Repetir hasta llegar a la ultima fila).

$F(4; 2, 2)$

1	1	2	2
1	1	2	2
2	2	1	1
2	2	1	1

Algoritmo para encontrar las i -transversales

Buscar 1-transversal

Tomar el primer elemento disponible.

Eliminar columna donde esta el
elemento seleccionado.

Ir a la siguiente fila.

(Repetir hasta llegar a la ultima fila).

$F(4; 2, 2)$

1	1	2	2
1	1	2	2
2	2	1	1
2	2	1	1

Algoritmo para encontrar las i -transversales

Buscar 1-transversal

Tomar el primer elemento disponible.

Eliminar columna donde esta el elemento seleccionado.

Ir a la siguiente fila.

(Repetir hasta llegar a la ultima fila).

$F(4; 2, 2)$

1	1	2	2
1	1	2	2
2	2	1	1
2	2	1	1

Algoritmo para encontrar las i -transversales

Buscar 1-transversal

Tomar el primer elemento disponible.

Eliminar columna donde esta el elemento seleccionado.

Ir a la siguiente fila.

(Repetir hasta llegar a la ultima fila).

Verificar que la transversal este completa.

Verificar que la transversal no haya sido guardada previamente
guardar la transversal.

Anular el ultimo elemento encontrado.

restablecer los elementos que se encuentren después de este ultimo.

Volver al principio.

$F(4;2,2)$

1 1 2 2

1 1 2 2

2 2 1 1

2 2 1 1

Pares ordenados:

(1,1), (2,2), (3,3), (4,4)

Algoritmo para encontrar las i -transversales

Buscar 1-transversal

Tomar el primer elemento disponible.

Eliminar columna donde esta el elemento seleccionado.

Ir a la siguiente fila.

(Repetir hasta llegar a la ultima fila).

Verificar que la transversal este completa.

Verificar que la transversal no haya sido guardada previamente
guardar la transversal.

Anular el ultimo elemento encontrado.

restablecer los elementos que se encuentren después de este ultimo.

Volver al principio.

$F(4;2,2)$

1 1 2 2

1 1 2 2

2 2 1 1

2 2 1 **0**

Pares ordenados:

(1,1), (2,2), (3,3), (4,4)

Algoritmo para encontrar las i -transversales

Buscar 1-transversal

Tomar el primer elemento disponible.

Eliminar columna donde esta el elemento seleccionado.

Ir a la siguiente fila.

(Repetir hasta llegar a la ultima fila).

Verificar que la transversal este completa.

Verificar que la transversal no haya sido guardada previamente
guardar la transversal.

Anular el ultimo elemento encontrado.

restablecer los elementos que se encuentren después de este ultimo.

Volver al principio.

$F(4; 2, 2)$

1 1 2 2

1 1 2 2

2 2 0 1

2 2 1 1

Pares ordenados:

(1,1), (2,2), (3,3), (4,4)

(1,1), (2,2), (3,4), (4,3)

Algoritmo para encontrar las i -transversales

Buscar 1-transversal

Tomar el primer elemento disponible.

Eliminar columna donde esta el elemento seleccionado.

Ir a la siguiente fila.

(Repetir hasta llegar a la ultima fila).

Verificar que la transversal este completa.

Verificar que la transversal no haya sido guardada previamente
guardar la transversal.

Anular el ultimo elemento encontrado.

restablecer los elementos que se encuentren después de este ultimo.

Volver al principio.

$F(4; 2, 2)$

1 1 2 2

1 1 2 2

2 2 0 1

2 2 **0** 1

Pares ordenados:

(1,1), (2,2), (3,3), (4,4)

(1,1), (2,2), (3,4), (4,3)

Algoritmo para encontrar las i -transversales

Buscar 1-transversal

Tomar el primer elemento disponible.

Eliminar columna donde esta el elemento seleccionado.

Ir a la siguiente fila.

(Repetir hasta llegar a la ultima fila).

Verificar que la transversal este completa.

Verificar que la transversal no haya sido guardada previamente
guardar la transversal.

Anular el ultimo elemento encontrado.

restablecer los elementos que se encuentren después de este ultimo.

Volver al principio.

$F(4; 2, 2)$

1 1 2 2

1 1 2 2

2 2 0 0

2 2 1 1

Pares ordenados:

(1,1), (2,2), (3,3), (4,4)

(1,1), (2,2), (3,4), (4,3)

Algoritmo para encontrar las i -transversales

Buscar 1-transversal

Tomar el primer elemento disponible.

Eliminar columna donde esta el elemento seleccionado.

Ir a la siguiente fila.

(Repetir hasta llegar a la ultima fila).

Verificar que la transversal este completa.

Verificar que la transversal no haya sido guardada previamente
guardar la transversal.

Anular el ultimo elemento encontrado.

restablecer los elementos que se encuentren después de este ultimo.

Volver al principio.

$F(4; 2, 2)$

1 1 2 2

1 0 2 2

2 2 1 1

2 2 1 1

Pares ordenados:

(1,1), (2,2), (3,3), (4,4)

(1,1), (2,2), (3,4), (4,3)

Algoritmo para encontrar las i -transversales

Buscar 1-transversal

Tomar el primer elemento disponible.

Eliminar columna donde esta el elemento seleccionado.

Ir a la siguiente fila.

(Repetir hasta llegar a la ultima fila).

Verificar que la transversal este completa.

Verificar que la transversal no haya sido guardada previamente
guardar la transversal.

Anular el ultimo elemento encontrado.

restablecer los elementos que se encuentren después de este ultimo.

Volver al principio.

$F(4; 2, 2)$

<u>0</u>	1	2	2
1	1	2	2
2	2	1	1
2	2	1	1

Pares ordenados:

(1,1), (2,2), (3,3), (4,4)

(1,1), (2,2), (3,4), (4,3)

(1,2), (2,1), (3,3), (4,4)

Algoritmo para encontrar las i -transversales

Buscar 1-transversal

Tomar el primer elemento disponible.

Eliminar columna donde esta el elemento seleccionado.

Ir a la siguiente fila.

(Repetir hasta llegar a la ultima fila).

Verificar que la transversal este completa.

Verificar que la transversal no haya sido guardada previamente
guardar la transversal.

Anular el ultimo elemento encontrado.

restablecer los elementos que se encuentren después de este ultimo.

Volver al principio.

$F(4; 2, 2)$

0 1 2 2

1 1 2 2

2 2 1 1

2 2 1 0

Pares ordenados:

(1,1), (2,2), (3,3), (4,4)

(1,1), (2,2), (3,4), (4,3)

(1,2), (2,1), (3,3), (4,4)

Algoritmo para encontrar las i -transversales

Buscar 1-transversal

Tomar el primer elemento disponible.

Eliminar columna donde esta el elemento seleccionado.

Ir a la siguiente fila.

(Repetir hasta llegar a la ultima fila).

Verificar que la transversal este completa.

Verificar que la transversal no haya sido guardada previamente
guardar la transversal.

Anular el ultimo elemento encontrado.

restablecer los elementos que se encuentren después de este ultimo.

Volver al principio.

$F(4; 2, 2)$

0 1 2 2

1 1 2 2

2 2 0 1

2 2 1 1

Pares ordenados:

(1,1), (2,2), (3,3), (4,4)

(1,1), (2,2), (3,4), (4,3)

(1,2), (2,1), (3,3), (4,4)

(1,2), (2,1), (3,4), (4,3)

Algoritmo para encontrar las i -transversales

Buscar 1-transversal

Tomar el primer elemento disponible.

Eliminar columna donde esta el elemento seleccionado.

Ir a la siguiente fila.

(Repetir hasta llegar a la ultima fila).

Verificar que la transversal este completa.

Verificar que la transversal no haya sido guardada previamente
guardar la transversal.

Anular el ultimo elemento encontrado.

restablecer los elementos que se encuentren después de este ultimo.

Volver al principio.

$F(4; 2, 2)$

0 1 2 2

1 1 2 2

2 2 0 1

2 2 0 1

Pares ordenados:

(1,1), (2,2), (3,3), (4,4)

(1,1), (2,2), (3,4), (4,3)

(1,2), (2,1), (3,3), (4,4)

(1,2), (2,1), (3,4), (4,3)

Algoritmo para encontrar las i -transversales

Buscar 1-transversal

Tomar el primer elemento disponible.

Eliminar columna donde esta el elemento seleccionado.

Ir a la siguiente fila.

(Repetir hasta llegar a la ultima fila).

Verificar que la transversal este completa.

Verificar que la transversal no haya sido guardada previamente
guardar la transversal.

Anular el ultimo elemento encontrado.

restablecer los elementos que se encuentren después de este ultimo.

Volver al principio.

$F(4; 2, 2)$

0 1 2 2

1 1 2 2

2 2 0 0

2 2 1 1

Pares ordenados:

(1,1), (2,2), (3,3), (4,4)

(1,1), (2,2), (3,4), (4,3)

(1,2), (2,1), (3,3), (4,4)

(1,2), (2,1), (3,4), (4,3)

Algoritmo para encontrar las i -transversales

Buscar 1-transversal

Tomar el primer elemento disponible.

Eliminar columna donde esta el elemento seleccionado.

Ir a la siguiente fila.

(Repetir hasta llegar a la ultima fila).

Verificar que la transversal este completa.

Verificar que la transversal no haya sido guardada previamente
guardar la transversal.

Anular el ultimo elemento encontrado.

restablecer los elementos que se encuentren después de este ultimo.

Volver al principio.

$F(4; 2, 2)$

0 1 2 2

0 1 2 2

2 2 1 1

2 2 1 1

Pares ordenados:

(1,1), (2,2), (3,3), (4,4)

(1,1), (2,2), (3,4), (4,3)

(1,2), (2,1), (3,3), (4,4)

(1,2), (2,1), (3,4), (4,3)

Algoritmo para encontrar las i -transversales

Buscar 1-transversal

Tomar el primer elemento disponible.

Eliminar columna donde esta el elemento seleccionado.

Ir a la siguiente fila.

(Repetir hasta llegar a la ultima fila).

Verificar que la transversal este completa.

Verificar que la transversal no haya sido guardada previamente
guardar la transversal.

Anular el ultimo elemento encontrado.

restablecer los elementos que se encuentren después de este ultimo.

Volver al principio.

$F(4; 2, 2)$

0 0 2 2

1 1 2 2

2 2 1 1

2 2 1 1

Pares ordenados:

(1,1), (2,2), (3,3), (4,4)

(1,1), (2,2), (3,4), (4,3)

(1,2), (2,1), (3,3), (4,4)

(1,2), (2,1), (3,4), (4,3)

Trabajo Actual

Tomar un cuadrado de frecuencia con vector $F(9;8,1)$

Buscar todas las 1-transversales

Para cada 1-transversal, construir un cuadrado de frecuencia con vector $F(9;7,1,1)$.

Clasificar cada cuadrado de frecuencia $F(9;7,1,1)$ encontrado en clases de isotopía.

Con un cuadrado de frecuencia $F(9;7,1,1)$ y las clases de isotopia sustituir en la siguiente función para obtener el numero de cuadrados $F(9;6,1,1,1,1)$ que no se sabe.

$$\binom{n}{\lambda_1, \dots, \lambda_m} \binom{n-1}{\lambda_1-1, \dots, \lambda_m} \sum_{j=1}^{\Lambda} n_j T_m(F_j(n))$$

Lema 3.1

Referencia

Francis N. Castro, Gary L. Mullen and Ivelisse M. Rubio (2009). ***Some Enumerational Results Relating the Number of Latin and Frequency Squares of order n .***

Agradecimientos

Dra. Ivelisse Rubio
Prof. Francis N. Castro
Lourdes Morales