Número de Waring en cuerpos finitos

Por Jean-Karlo Accetta y Zahir Mejias

Departamento de Ciencia de Cómputos
Universidad de Puerto Rico, Recinto de Río Piedras

Número de Waring

- Número mínimo de variables necesarias para que la ecuación de forma:

$$x_1^d + x_2^d + \ldots + x_n^d = \alpha$$

- Tenga solución en los números naturales para cualquier constante α ϵ N.

Preliminares

- Cuerpo finito:
  - Conjunto finito de elementos que tiene suma y multiplicación, con propiedades similares a los números reales.
  - Orden: cantidad p^r de elementos en el cuerpo.

- Trabajamos con ecuaciones sobre cuerpos finitos F_p donde p es primo, y denotamos el número de Waring $\delta(d,p)$.

$$x_1^d + x_2^d + \ldots + x_n^d = \alpha$$

Preliminares

- En nuestro caso, nos enfocamos en los cuerpos denotados por Z_{p}, y sus elementos pueden ser representados por los números enteros de *0* a *p-1*.
  - La aritmética de estos cuerpos es módulo *p*.

- Por ejemplo, $Z_5 = \{ 0, 1, 2, 3, 4 \}$
  - $1 + 1 = 2$
  - $2 + 2 = 4$
  - $3 + 3 = 6 = 1 \pmod 5$; ó $\equiv_5 1$

$$x_1^d + x_2^d + \ldots + x_n^d = \alpha$$

Lemas y proposiciones

- **Proposición 1.** $\delta(d, p) = 1 \leftrightarrow dmc(d, p\text{-}1) = 1$
- **Proposición 2.** Si $d \mid (p\text{-}1)$, entonces $\delta(d, p) \geq 2$
- **Lema 1.** $\delta(p - 1, p) = p - 1$
- **Lema 2.** $\delta\left(\frac{p-1}{2}, p\right) = \frac{p-1}{2}$

Resultados Anteriores

d	$\delta\ (d\ ,\ p) \geq 3$	$\delta\ (d\ ,\ p) = 2$ *
3	$\delta\ (3\ ,\ 7) = 3$	$p \geq 13$
4	$\delta\ (4\ ,\ 29) = 3$	$p \geq 37$
5	$\delta\ (5\ ,\ 61) = 3$	$p \geq 71$
6	$\delta\ (6\ ,\ 223) = 3$	$p \geq 229$
7	$\delta\ (7\ ,\ 127) \geq 3$	$p \geq 196$
8	$\delta\ (8\ ,\ 761) = 3$	$p \geq 769$
9	$\delta\ (9\ ,\ 307) \geq 3$	$p \geq 379$
10	?	$p \geq 5171$

* Nota: $d \mid (p-1)$

PROBLEMAS

- Hallar valor exacto de ***δ (7,127)** y **δ (9,307).***

- Para $d \geq 10$, hallar valor máximo de p tal que:

  $d \mid (p\text{-}1)$ y $\delta(d,p) \neq 2$.

- Completar tablas con todos los valores de $\delta(d,p)$ *tal que* $d \leq 10$ y $p \geq d+1$.

ALGORITMO

- Verifica condiciones de lemas o teoremas
- De no satisfacerse ninguna condición:
  - Se construyen dos listas

Constantes

α	✓
0	
1	
2	
3	
4	
5	
6	

Resultados de α^d

α^d	β
0^3	
1^3	
2^3	
3^3	
4^3	
5^3	
6^3	

*Se usa de ejemplo a $\delta(3, 7)$

Algoritmo

- Se marcan los resultados de α^d en la lista de constantes comenzando un ciclo con *i =1*.
- Por cada repetición, *i = i + 1*

- Es decir,
- $i = 1 \Rightarrow x_1^d = \alpha$, para toda a elemento de Z_p
- $i = 2 \Rightarrow x_1^d + x_2^d = \alpha$
- $i = 3 \Rightarrow x_1^d + x_2^d + x_3^d = \alpha$
- …
- $i = n \Rightarrow x_1^d + x_2^d + x_3^d + \ldots + x_n^d = \alpha$

Algoritmo

- Se marcan los resultados de α^d en la lista de constantes comenzando un ciclo con *i =1*.
- Por cada repetición, *i = i + 1*

Constantes

α	✓
0	
1	
2	
3	
4	
5	
6	

Resultados de α^d

α^d	β
0^3	0
1^3	1
2^3	1
3^3	6
4^3	1
5^3	6
6^3	6

β
0
1
6

*Se usa de ejemplo a δ(3, 7)

Algoritmo

- Se marcan los resultados de α^d en la lista de constantes comenzando un ciclo con $i = 1$.
- Por cada repetición, $i = i + 1$

Constantes

α	✓
0	✓
1	✓
2	
3	
4	
5	
6	✓

Resultados de α^d

α^d	β
0^3	0
1^3	1
2^3	1
3^3	6
4^3	1
5^3	6
6^3	6

β
0
1
6

*Se usa de ejemplo a $\delta(3, 7)$

Algoritmo

- Se le suma a cada constante marcada, cada α^d de la segunda lista, y se marca el nuevo resultado en la primera lista.

Constantes

α	✓
0	✓
1	✓
2	
3	
4	
5	
6	✓

i = i + 1
i = 2

β
0
1
6

$$1 + 1 = 2$$

$$1 + 6 = 0$$

$$6 + 6 = 5$$

$$\delta\,(3,\ 7) = 2?$$

ALGORITMO

- Se le suma a cada constante marcada, cada α^d de la segunda lista, y se marca el nuevo resultado en la primera lista.

Constantes

α	✓
0	✓
1	✓
2	✓
3	
4	
5	✓
6	✓

$i = i + 1$

$i = 2$

$$1 + 1 = 2$$

$$1 + 6 = 0$$

$$6 + 6 = 5$$

β
0
1
6

$\delta\,(3,\ 7) > 2$

Algoritmo

- Al estar marcadas todas las constantes, el resultado es $\delta(d,p) = i$.

Constantes

α	✓
0	✓
1	✓
2	✓
3	
4	
5	✓
6	✓

$$i = i + 1$$
$$i = 3$$

$$2 + 1 = 3$$
$$2 + 6 = 1$$
$$5 + 1 = 6$$
$$5 + 6 = 4$$
$$\delta\,(\,3,\ 7\,) = 3?$$

β
0
1
6

Algoritmo

- Al estar marcadas todas las constantes, el resultado es $\delta(d,p) = i$.

Constantes

α	✓
0	✓
1	✓
2	✓
3	✓
4	✓
5	✓
6	✓

$$i = i + 1$$
$$i = 3$$

$$2 + 1 = 3$$
$$2 + 6 = 1$$
$$5 + 1 = 6$$
$$5 + 6 = 4$$
$$\delta(3, 7) = 3$$

β
0
1
6

Resultados

d	Anteriores	Nuestros
7	$\delta\ (7\ ,\ 127) \geq 3$	$\delta\ (7\ ,\ 127) = 3$
9	$\delta\ (9\ ,\ 307) \geq 3$	$\delta\ (9\ ,\ 307) = 3$
10	$\delta\ (10\ ,\ p \geq 5171) = 2$	$\delta\ (10\ ,\ p \geq 4441) = 2$

Nuestros Resultados

p	*d*	*δ (d, p)*	Referencia
7	2	2	Nuestro Algoritmo
7	3	3	Moreno y Castro*
7	4	2	Nuestro Algoritmo
7	5	1	**Proposición 1**
7	6	6	**Lema 1**

* "On The Calculation and Estimation of Waring Number for Finite Fields" by Oscar Moreno & Francis Castro.

Trabajos Futuros

1. Seguir llenando tabla de resultados de δ *(d,p)*
2. Optimizar el algoritmo de las sumas a las constantes marcadas en Z_p
3. Trabajar con número de Waring para sistemas de ecuaciones $\delta(d,k,p)$ de tipo:

$$\begin{cases} x_1^d + x_2^d + \ldots + x_n^d = \alpha \\ x_1^k + x_2^k + \ldots + x_n^k = \beta \end{cases}$$

4. Trabajar con teoremas y lemas para cuerpos de tamaño p^r con $r \geq 2$.

Agradecimientos

- Ivelisse Rubio
- Francis Castro
- Ioannis Koutis